Απειροστικός Λογισμός Ι   Μάθημα 22   18/12/2015 ①

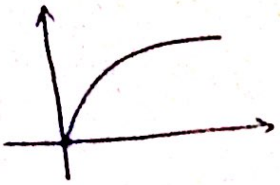
► $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ x>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ , & x>0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty, & x=0\end{cases}$$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x>0$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, $f'(0)=+\infty$.



► $f(x)=\sqrt[n]{x}\ ,\ n\geq 3$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{x+h}^{\,n-1}+\sqrt[n]{x+h}^{\,n-2}\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x+h}\sqrt[n]{x}^{\,n-2}+\sqrt[n]{x}^{\,n-1})}{h(\sqrt[n]{x+h}^{\,n-1}+\sqrt[n]{x+h}^{\,n-2}\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x+h}\sqrt[n]{x}^{\,n-2}+\sqrt[n]{x}^{\,n-1})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt[n]{x+h}^{\,n-1}+\sqrt[n]{x+h}^{\,n-2}\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x+h}\sqrt[n]{x}^{\,n-2}+\sqrt[n]{x}^{\,n-1})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{x+h}^{\,n-1}+\sqrt[n]{x+h}^{\,n-2}\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x+h}\sqrt[n]{x}^{\,n-2}+\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x}^{\,n-1}+\ldots+\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}=\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

$$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f,g:I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0\in I$.

α) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

β) $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(x_0)$

γ) Αν $g(x_0)\neq 0$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

δ) Αν $g(x_0)\neq 0$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

(2)

Απόδειξη:

α) $(f+g)'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)$

β) $(f\cdot g)'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\underset{\text{άρα η συνεχής στο } x_0}{\overset{\text{επειδή g παρ.}}{=}}f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$

γ) $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(\frac{1}{g})(x_0+h)-(\frac{1}{g})(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\,g(x_0)g(x_0+h)}=$

$=\lim\limits_{h\to0}(-1)\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot\dfrac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}=-1\cdot g'(x_0)\cdot\dfrac{1}{g(x_0)g(x_0)}=-\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$

δ) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)\overset{β)}{=}f'(x_0)\cdot\dfrac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)\overset{γ)}{=}$

$\overset{γ)}{=}f'(x_0)\cdot\dfrac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$

Υπενθύμιση: (Παραγώγιση Καραθεοδωρή)

$f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$ (I διάστημα)

f παραγωγίσιμη στο $x_0 \iff \exists\,\varphi:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 με $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x\neq x_0$.

Τότε: $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

Πρόταση: Έστω $g:I\to\mathbb{R}$, $f:J\to\mathbb{R}$ και $g(I)\subseteq J$, $x_0\in I$ ώστε g παραγωγίσιμη στο x_0 και f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$.

Τότε, η $f\circ g:I\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Απόδειξη:

Επειδή η g παραγωγίσιμη στο x_0, από την παραπάνω υπενθύμιση $\exists \varphi_g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 ώστε $\varphi_g(x) = \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ για $x \neq x_0$.

Επειδή η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, από παρατήρηση Καραθεοδωρή: $\exists \varphi_f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $g(x_0)$ ώστε $\varphi_f(y) = \dfrac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)}$ για $y \neq g(x_0)$.

Ορίζουμε $\varphi : I \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \varphi_f(g(x)) \cdot \varphi_g(x)$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

α) φ συνεχής στο x_0

β) Για $x \neq x_0$ $\varphi(x) = \dfrac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0}$

γ) $\varphi(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

α) Η g παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow$ Η g συνεχής στο x_0 και φ_f συνεχής στο $g(x_0)$ $\Rightarrow$ $\varphi_f \circ g$ συνεχής και φ_g συνεχής $\Rightarrow$ το γινόμενό τους, δηλαδή η φ, είναι συνεχής στο x_0.

γ) $\varphi(x_0) = \varphi_f(g(x_0))\, \varphi_g(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

β) Έστω $x \in I$ με $x \neq x_0$

β1) Αν $g(x) \neq g(x_0)$ $\dfrac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$

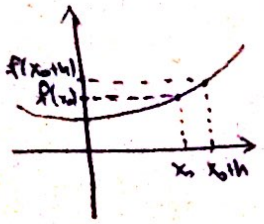
$= \varphi_f(g(x)) \cdot \varphi_g(x) = \varphi(x)$

β2) Αν $g(x) = g(x_0)$ $\varphi(x) = \varphi_f(g(x)) \cdot \varphi_g(x) = \varphi_f(g(x_0)) \cdot \varphi_g(x) = 0 \cdot \varphi_g(x) = 0$

$\dfrac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(f \circ g)(x_0) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = 0.$

Παρατηρήσεις:

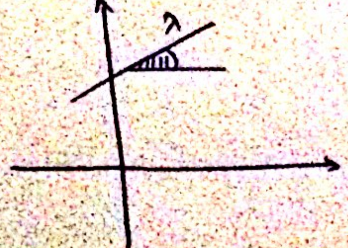
- $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$
- $(\tan)'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{(\sin)'(x)\cos x - \sin x (\cos)'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$
- $\left(n[f(x)]^n\right)' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
- $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
- $(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$
- Αν $f(x)>0$ $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
- Αν $f(x)>0$ $(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $(a^x)' = (e^{\log(a^x)})' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}(x\log a)' = a^x \log a$
- $(x^a)' = (e^{\log(x^a)})' = (e^{a\log x})' = e^{a\log x} \cdot (a\log x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
- $(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x} \cdot (x\log x)' = x^x\left(\log x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\log x + 1)$.
- $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\log f(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g(x)\cdot\log f(x)\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία που περνά από το σημείο $(x_0, f(x_0))$ και έχει κλίση $f'(x_0)$. Είναι η ευθεία:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

περνά από το (x_0, y_0) και έχει κλίση λ.